



Optimización de la inversión geoestadística del campo eléctrico sintético usando FFT

Optimization of geostatistical inversion of synthetic electric field using FFT

Julio Morfe

Fundación Venezolana de Investigaciones Sismológicas
Departamento de Geofísica
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6291-6928>
jmorfe@funvisis.gob
Miranda-Venezuela

Herbert Rendón

Fundación Venezolana de Investigaciones Sismológicas
Departamento de Sismología
ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-2857-1816>
hrendon.funvisis@gmail.com
Miranda-Venezuela

Resumen

Se investiga la función objetivo para la optimización de la inversión geoestadística del campo eléctrico en medios de capas planas, mediante Transformada Rápida de Fourier y estimar la permeabilidad magnética, permitividad eléctrica y conductividad.

Palabras clave:

Optimización; onda; electromagnética; permitividad; conductividad

Abstract

The objective function for the optimization of the geostatistical inversion of the electric field in flat layer media is investigated, using Fast Fourier Transform and estimating the magnetic permeability, electrical permittivity and conductivity.

Keywords:

Optimization; wave; electromagnetic; permeability; conductivity



Introducción

La inversión geoestadística es una herramienta fundamental en la interpretación de datos electromagnéticos, utilizada ampliamente en la geofísica para caracterizar propiedades subterráneas a partir de mediciones de campo eléctrico. Este estudio se enfoca en optimizar el proceso de inversión aplicando la Transformada Rápida de Fourier (FFT) a un modelo de campo eléctrico sintético, lo cual permite manejar grandes volúmenes de datos de manera eficiente. Las ecuaciones de Maxwell proporcionan el marco teórico para modelar la propagación de ondas electromagnéticas en medios isotrópicos y homogéneos, y su comprensión es esencial para determinar la respuesta del subsuelo ante la incidencia de estas ondas. A través de la FFT, se busca mejorar la eficiencia y precisión en la estimación de parámetros como la permeabilidad magnética, la permitividad eléctrica y la conductividad, aspectos críticos para aplicaciones en la exploración de recursos naturales, estudios medioambientales y amenaza sísmica. La implementación de esta metodología promete avances significativos en la interpretación geofísica, aportando valor en contextos científicos y de ingeniería.

Ondas electromagnéticas en la materia

Dentro de la materia, pero en regiones donde la densidad macroscópica de carga eléctrica es cero, las ecuaciones de Maxwell se vuelven (Neff, 1991: p. 127, 129, 132, 138):

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 ; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 ; \quad \nabla \times \vec{H} - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \sigma \vec{E} = 0; \quad (2)$$

para medios isotrópicos y homogéneos, donde la densidad de flujo de eléctrico (campo de desplazamiento eléctrico por la presencia de un dieléctrico) $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, y la intensidad de campo magnético $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$.

Para el caso general de incidencia oblicua, en el que la onda entrante encuentra una interface en un ángulo arbitrario θ_i (Figura N° 1), supongamos que tenemos una onda plana electromagnética monocromática:

$$\vec{E}_I(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0I} e^{j(\vec{K}_I \cdot \vec{r} - \omega t)} ; \quad \vec{B}_I(\vec{r}, t) = \frac{\mu_1}{\eta_1} (\widehat{K}_I \times \vec{E}_I) \quad (3)$$

donde $\widehat{K}_I$ es un vector unitario en la dirección de viaje de la onda incidente, y dando lugar a una onda reflejada,

$$\vec{E}_R(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0R} e^{j(\vec{K}_R \cdot \vec{r} - \omega t)} ; \quad \vec{B}_R(\vec{r}, t) = \frac{\mu_1}{\eta_1} (\widehat{K}_R \times \vec{E}_R) \quad (4)$$

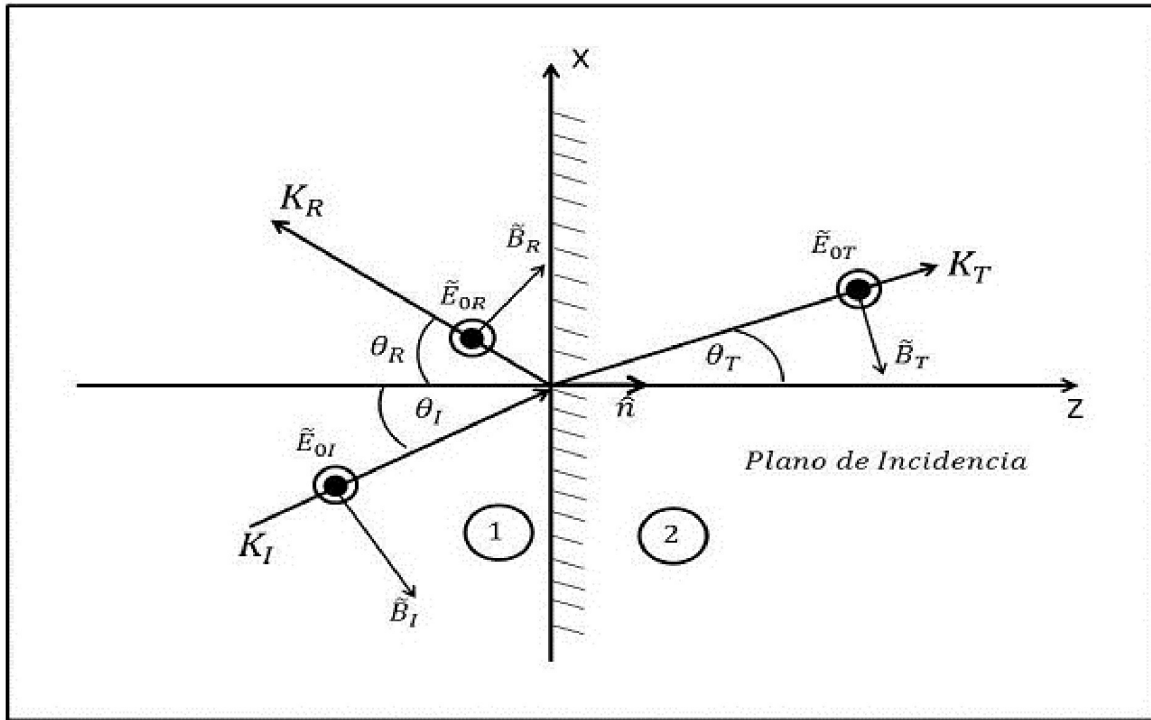
y una onda transmitida,

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0T} e^{j(\vec{K}_T \cdot \vec{r} - \omega t)} ; \quad \vec{B}_T(\vec{r}, t) = \frac{\mu_2}{\eta_2} (\widehat{K}_T \times \vec{E}_T) \quad (5)$$

Las tres ondas tienen la misma frecuencia ω y $\vec{K}_I$, $\vec{K}_R$, $\vec{K}_T$, son los vectores de número de onda incidente, reflejada y transmitida, respectivamente. La ley de Snell indica que $\frac{\sin(\theta_T)}{\sin(\theta_I)} = \frac{v_2}{v_1}$, donde v_1 y v_2 son las velocidades de la onda incidente del medio 1 y transmitida del medio 2, respectivamente.



Figura N° 1. Reflexión y refracción de la onda plana monocromática con polarización perpendicular al plano de incidencia



Fuente: Morfe, (2024).

La impedancia intrínseca es (Neff, 1991; p. 184)

$$\eta = \frac{\mu\omega}{\alpha^2 + \beta^2} (\beta + j\alpha) ; \quad (6)$$

donde:

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[\frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1\right]\right]^{\frac{1}{2}} \geq 0 ; \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[\frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1\right]\right]^{\frac{1}{2}} > 0 ;$$

$$D_1^\perp - D_2^\perp = 0 \quad (7)$$

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0 \quad (8)$$

$$E_1^\parallel - E_2^\parallel = 0 \quad (9)$$

$$H_1^\parallel - H_2^\parallel = 0 \quad (10)$$

El campo eléctrico es paralelo al plano $z = 0$ (Figura N° 1), el cual se toma como:

$$\widetilde{E}_{0I} = E_I \hat{j}; \widetilde{E}_{0R} = E_R \hat{j}; \widetilde{E}_{0T} = E_T \hat{j}; \quad (11)$$

y la velocidad de fase es $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{K}$; K = número de onda.

Los campos en el medio (1), $\widetilde{E}_I + \widetilde{E}_R$ y $\widetilde{B}_I + \widetilde{B}_R$ junto con los campos $\widetilde{E}_T(\vec{r}, t)$ y $\widetilde{B}_T$ del medio (2), deben satisfacer las ecuaciones de frontera (densidad de carga eléctrica cero):

donde E_I = campo eléctrico incidente polarizado en el eje "y", E_R = campo eléctrico reflejado polarizado en el eje "y", E_T = campo eléctrico transmitido polarizado en el eje "y". Las ecuaciones de frontera llevan a:





$$[\epsilon_1(\widetilde{E}_{0I} + \widetilde{E}_{0R}) - \epsilon_2(\widetilde{E}_{0T})] \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow \epsilon_1(\widetilde{E}_{0I} + \widetilde{E}_{0R})_z = \epsilon_2(\widetilde{E}_{0T})_z = 0; \quad (12)$$

$$\left[\frac{\mu_1}{\eta_1} (\widetilde{K}_I x \widetilde{E}_{0I} + \widetilde{K}_R x \widetilde{E}_{0R}) - \frac{\mu_2}{\eta_2} (\widetilde{K}_T x \widetilde{E}_{0T}) \right] \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow \quad (13)$$

$$\frac{\mu_1}{\eta_1} (\widetilde{K}_I x \widetilde{E}_{0I} + \widetilde{K}_R x \widetilde{E}_{0R})_z = \frac{\mu_2}{\eta_2} (\widetilde{K}_T x \widetilde{E}_{0T})_z;$$

$$[(\widetilde{E}_{0I} + \widetilde{E}_{0R}) - (\widetilde{E}_{0T})] x \hat{n} = 0; \Rightarrow \quad (14)$$

$$(\widetilde{E}_{0I} + \widetilde{E}_{0R})_y = (\widetilde{E}_{0T})_y;$$

$$\left[\frac{1}{\eta_1} (\widetilde{K}_I x \widetilde{E}_{0I} + \widetilde{K}_R x \widetilde{E}_{0R}) - \frac{1}{\eta_2} (\widetilde{K}_T x \widetilde{E}_{0T}) \right] x \hat{n} = 0; \Rightarrow \quad (15)$$

$$\frac{1}{\eta_1} (\widetilde{K}_I x \widetilde{E}_{0I} + \widetilde{K}_R x \widetilde{E}_{0R})_x = \frac{1}{\eta_2} (\widetilde{K}_T x \widetilde{E}_{0T})_x;$$

La ecuación (12) es cero debido a que el campo eléctrico incidente es paralelo al plano $z = 0$, la ecuación (13) usando la ley de Snell se convierte en una duplicación de la ecuación (14). Esta última teniendo en cuenta la ecuación (11) resulta en:

$$E_I + E_R - E_T = 0; \quad (16)$$

Sustituyendo las ecuaciones (11) y (16) en la ecuación (15), resolviendo los productos vectoriales se obtiene:

$$\frac{1}{\eta_1} (E_I - E_R) \cos(\theta_I) = \frac{1}{\eta_2} (E_I + E_R) \cos(\theta_T), \quad (17)$$

despejando el coeficiente de reflexión se tiene:

$$\frac{E_R}{E_I} = \frac{\frac{\cos(\theta_I)}{\eta_1} - \frac{\cos(\theta_T)}{\eta_2}}{\frac{\cos(\theta_I)}{\eta_1} + \frac{\cos(\theta_T)}{\eta_2}}; \quad (18)$$

Tomando la permitividad eléctrica con parte real e imaginaria, la velocidad de fase de una onda electromagnética plana en un medio está dada por la ecuación (Neff, 1991):

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon'}} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} + \frac{\sigma}{\omega \epsilon'} \right)^2 + 1 \right]}}; \quad (19)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon' - j(\epsilon'' + \frac{\sigma}{\omega})}}; \eta \text{ es la impedancia intrínseca del medio.} \quad (20)$$

donde, $\epsilon'(\omega)$ es la parte real de la permitividad eléctrica relacionada con la capacidad del material para almacenar energía eléctrica y $\epsilon''(\omega)$ es la parte imaginaria de la permitividad eléctrica está asociada con la capacidad de disipar energía en forma de calor debido a efectos resistivos de la polarización y despolarización del dieléctrico, σ es la conductividad eléctrica del medio.

Reescribiendo la ecuación (18), el coeficiente de reflexión en el sistema internacional para un medio en función del número de muestra τ , ($\tau=0,1,2,\dots,(N-1)$), donde N es el número de muestras totales y el tiempo de viaje de la onda es dado por $t = \tau * T_m$; T_m es el tiempo de muestreo, resulta en:

$$R_{\omega_c(k)}[\tau] = \frac{A[\tau] - jB[\tau]}{C[\tau] + D[\tau]} = \frac{A[\tau]}{C[\tau] + D[\tau]} - \frac{jB[\tau]}{C[\tau] + D[\tau]}; \quad (21)$$

donde:

$$A[\tau] = (\cos\theta_I[\tau])^2 - \frac{\mu_{r0}[\tau]((\epsilon'_{r0}[\tau+1])^2 + (\epsilon''_{r0}[\tau+1] + \frac{\sigma_0[\tau+1]}{\epsilon_0\omega_c(k)})^2)(\cos\theta_T)^2}{\mu_{r0}[\tau+1]((\epsilon'_{r0}[\tau])^2 + (\epsilon''_{r0}[\tau] + \frac{\sigma_0[\tau]}{\epsilon_0\omega_c(k)})^2)}; \quad (22)$$

$$B[\tau] = \sqrt{\frac{\mu_{r0}[\tau]}{\mu_{r0}[\tau+1]}} \left(\frac{[(\epsilon'_{r0}[\tau+1])^2 + (\epsilon''_{r0}[\tau+1] + \frac{\sigma_0[\tau+1]}{\epsilon_0\omega_c(k)})^2]}{[(\epsilon'_{r0}[\tau])^2 + (\epsilon''_{r0}[\tau] + \frac{\sigma_0[\tau]}{\epsilon_0\omega_c(k)})^2]} \right) * AS; \quad (23)$$

$$AS = 2\cos(\theta_I[\tau])\cos(\theta_T)\sin(\varphi_0[\tau] - \varphi_0[\tau+1]); \quad (24)$$

$$C[\tau] = (\cos\theta_I[\tau])^2 + 2\cos(\theta_I)\cos(\theta_T)\cos(\varphi_0[\tau] - \varphi_0[\tau+1]) \cdot Ak; \quad (25)$$

$$Ak = \sqrt{\frac{\mu_{r0}[\tau]}{\mu_{r0}[\tau+1]}} \left(\frac{[(\epsilon'_{r0}[\tau+1])^2 + (\epsilon''_{r0}[\tau+1] + \frac{\sigma_0[\tau+1]}{\epsilon_0\omega_c(k)})^2]}{[(\epsilon'_{r0}[\tau])^2 + (\epsilon''_{r0}[\tau] + \frac{\sigma_0[\tau]}{\epsilon_0\omega_c(k)})^2]} \right); \quad (26)$$

$$D[\tau] = \frac{\mu_{r0}[\tau]((\epsilon'_{r0}[\tau+1])^2 + (\epsilon''_{r0}[\tau+1] + \frac{\sigma_0[\tau+1]}{\epsilon_0\omega_c(k)})^2)(\cos\theta_T)^2}{\mu_{r0}[\tau+1]((\epsilon'_{r0}[\tau])^2 + (\epsilon''_{r0}[\tau] + \frac{\sigma_0[\tau]}{\epsilon_0\omega_c(k)})^2)}; \quad (27)$$

$$\varphi_0[\tau] = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\epsilon''_{r0}[\tau] + \frac{\sigma_0[\tau]}{\epsilon_0\omega_c(k)}}{\epsilon'_{r0}[\tau]} \right); \quad (28)$$

$$\varphi_0[\tau+1] = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\epsilon''_{r0}[\tau+1] + \frac{\sigma_0[\tau+1]}{\epsilon_0\omega_c(k)}}{\epsilon'_{r0}[\tau+1]} \right); \quad (29)$$

$$\omega_c(k) = \frac{2\pi k}{NT_m} \text{ frecuencia angular}; \quad (30)$$

$$\cos(\theta_T[\tau]) = \sqrt{1 - \frac{(\mu_{r0}[\tau]\epsilon'_{r0}[\tau] + \mu_{r0}[\tau] \sqrt{(\epsilon'_{r0}[\tau])^2 + (\epsilon''_{r0}[\tau] + \frac{\sigma_0[\tau]}{\epsilon_0\omega_c(k)})^2}) * (\sin\theta_I[\tau])^2}{(\mu_{r0}[\tau+1]\epsilon'_{r0}[\tau+1] + \mu_{r0}[\tau+1] \sqrt{(\epsilon'_{r0}[\tau+1])^2 + (\epsilon''_{r0}[\tau+1] + \frac{\sigma_0[\tau+1]}{\epsilon_0\omega_c(k)})^2})}}}; \quad (31)$$

Las variables para nuestro estudio en el algoritmo de computación serían, $\vec{I} = (\epsilon'_{r0}[0] \dots \epsilon'_{r0}[N-1], \epsilon''_{r0}[0] \dots \epsilon''_{r0}[N-1], \sigma_0[0] \dots \sigma_0[N-1], \mu_{r0}[0] \dots \mu_{r0}[N-1], \theta_I[0] \dots \theta_I[N-1])$

Las variables para hacer interpretación geofísica serían $(\mu_{r_o}[m], \varepsilon'_{r_o}[m], \sigma_o[m])$ permeabilidad magnética, permitividad eléctrica y conductividad eléctrica respectivamente, donde $m = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)$, donde N es el número de muestras.

Funciones a optimizar

Partiendo de la densidad de probabilidad gaussiana marginal (Tarantola, 2005; pp. 26-29), que llamamos densidad de probabilidad posterior:

$f(\vec{I}) = c \cdot \exp[-S(\vec{I})]$, donde ("c" es una constante de proporcionalidad):

$$S(\vec{I}) = S_1(\vec{I}) + S_2(\vec{I}) ; \quad (32)$$

$$S_1(\vec{I}) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k'=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} |Y[k'] - Y_{mod}[k']| \cdot C_{dat}^{-1}(k', k) \cdot |Y[k] - Y_{mod}[k]| \right\} ; \quad (33)$$

$$Y_{mod}[k] = \left(\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} R_{\omega_c(k)}[m] \cdot f[l] \cdot e^{-j2\pi k \frac{(m+l)}{N}} \right); \quad (34)$$

$$S_2(\vec{I}) = \frac{1}{2} \sum_{t'=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} C_{mod}^{-1}(t', t) \cdot (I_1[t'] - I_{1previo}[t']) \cdot (I[t] - I_{previo}[t]); \quad (35)$$

donde $f[l]$ es la ondícula fuente, C_{dat} es la matriz de covarianza resultante de la suma de las matrices de covarianzas de la onda eléctrica observada y la debida al error del cálculo. Para hallar los parámetros del modelo de un medio de capas planas, la densidad de probabilidad posterior debe ser máxima, lo cual es equivalente a tomar el mínimo de la función objetivo dada por la ecuación (32), en consecuencia, al optimizar esta encontramos los valores de los parámetros donde la función sería mínima.

En la ecuación (34), se tiene el producto de la transformada discreta de Fourier DFT de $R_{\omega_c(k)}[\tau]$ y $f[l]$. La DFT es un algoritmo muy lento para señales discretas y finitas de muchas muestras, por lo que hay que aplicar la transformada de Fourier rápida (FFT) para $N = 2^n$, n es un número entero, y si $N = 2^n$ el algoritmo de Bluestein (Chirp_Z-transform, 2024). Consideramos que la matriz de covarianza para el ruido en los datos es del tipo diagonal (aplicar técnicas de filtrado para mejorar la relación señal/ruido antes de la inversión), es decir:

$$C_{dat} = \begin{pmatrix} C_{dat}(0,0) & 0 & 0 \\ \vdots & C_{dat}(1,1) & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots C_{dat}(N-1,N-1) \end{pmatrix} ; \quad (36)$$

$$\text{donde } C_{dat}(0,0) = C_{dat}(1,1) \cdots C_{dat}(N-1, N-1) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (|Y[k]| - E[|Y[k]|])^2.$$

Por lo tanto, la ecuación (33) se convierte en:

$$S_1(\vec{I}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} C_{dat}^{-1}(k, k) \cdot ((\Re\{Y[k]\} - \Re\{Y_{mod}[k]\})^2 + (\Im\{Y[k]\} - \Im\{Y_{mod}[k]\})^2);$$

Si tomamos el caso particular, $Y[k_{max}]$, donde la transformada rápida de Fourier de la onda eléctrica registrada $y[l]$, $l = 0, 1, \dots, N - 1$, en la antena receptora del (GPR) es máxima para la frecuencia, $k = k_{max}$, la ecuación $S_1(\vec{I})$ para dicha frecuencia se convierte en:

$$S_1(\vec{I}) = \frac{1}{2} C_{dat}^{-1}(k_{max}, k_{max}) \cdot ((\Re\{Y[k_{max}]\} - \Re\{Y_{mod}[k_{max}]\})^2 + (\Im\{Y[k_{max}]\} - \Im\{Y_{mod}[k_{max}]\})^2); \quad (37)$$

En consecuencia, el gradiente de $S_1(\vec{I})$ en $k = k_{max}$ es:

$$\nabla S_1(\vec{I}) = \left(\frac{\partial S_1(\vec{I})}{\partial \varepsilon'_{r_o}[m]}, \frac{\partial S_1(\vec{I})}{\partial \varepsilon''_{r_o}[m]}, \frac{\partial S_1(\vec{I})}{\partial \sigma_o[m]}, \frac{\partial S_1(\vec{I})}{\partial \mu_{r_o}[m]}, \frac{\partial S_1(\vec{I})}{\partial \theta_1[m]} \right) \quad (38)$$

donde

$$\frac{\partial S_1(\vec{I})}{\partial \varepsilon'_{r_o}[m]} = C_{dat}^{-1}(k, k) \cdot ((\Re\{Y[k]\} - \Re\{Y_{mod}[k]\}) \cdot \Re\left\{\frac{\partial Y_{mod}[k]}{\partial \varepsilon'_{r_o}[m]}\right\} + (\Im\{Y[k]\} - \Im\{Y_{mod}[k]\}) \cdot \Im\left\{\frac{\partial Y_{mod}[k]}{\partial \varepsilon'_{r_o}[m]}\right\}); \quad (39)$$

$$\frac{\partial S_1(\vec{I})}{\partial \varepsilon''_{r_o}[m]} = C_{dat}^{-1}(k, k) \cdot ((\Re\{Y[k]\} - \Re\{Y_{mod}[k]\}) \cdot \Re\left\{\frac{\partial Y_{mod}[k]}{\partial \varepsilon''_{r_o}[m]}\right\} + (\Im\{Y[k]\} - \Im\{Y_{mod}[k]\}) \cdot \Im\left\{\frac{\partial Y_{mod}[k]}{\partial \varepsilon''_{r_o}[m]}\right\}); \quad (40)$$

$$\frac{\partial S_1(\vec{I})}{\partial \sigma_o[m]} = C_{dat}^{-1}(k, k) \cdot ((\Re\{Y[k]\} - \Re\{Y_{mod}[k]\}) \cdot \Re\left\{\frac{\partial Y_{mod}[k]}{\partial \sigma_o[m]}\right\} + (\Im\{Y[k]\} - \Im\{Y_{mod}[k]\}) \cdot \Im\left\{\frac{\partial Y_{mod}[k]}{\partial \sigma_o[m]}\right\}); \quad (41)$$



$$\frac{\partial S_1(\vec{I})}{\partial \mu_{r_o}[m]} = C_{dat}^{-1}(k, k)$$

$$((\Re\{Y[k]\} - \Re\{Y_{mod}[k]\}) \cdot \Re\{\frac{\partial Y_{mod}[k]}{\partial \mu_{r_o}[m]}\} +$$

$$(\Im\{Y[k]\} - \Im\{Y_{mod}[k]\}) \cdot \Im\{\frac{\partial Y_{mod}[k]}{\partial \mu_{r_o}[m]}\}); \quad (42)$$

$$\frac{\partial S_1(\vec{I})}{\partial \theta_l[m]} = C_{dat}^{-1}(k, k)$$

$$((\Re\{Y[k]\} - \Re\{Y_{mod}[k]\}) \cdot \Re\{\frac{\partial Y_{mod}[k]}{\partial \theta_l[m]}\} +$$

$$(\Im\{Y[k]\} - \Im\{Y_{mod}[k]\}) \cdot \Im\{\frac{\partial Y_{mod}[k]}{\partial \theta_l[m]}\}); \quad (43)$$

donde, $\Re$ = parte real, $\Im$ = parte imaginaria y sustituyendo $k = k_{max}$

Además, $\frac{\partial}{\partial \varepsilon'_{r_o}[m]}, \frac{\partial}{\partial \varepsilon''_{r_o}[m]}, \frac{\partial}{\partial \sigma_o[m]}, \frac{\partial}{\partial \mu_{r_o}[m]}, \frac{\partial}{\partial \theta_l[m]}$ son las derivadas parciales respecto a $\varepsilon'_{r_o}[m], \varepsilon''_{r_o}[m], \sigma_o[m], \mu_{r_o}[m]$ y $\theta_l[m]$, respectivamente. Se puede mostrar que el gradiente de $S_2(\vec{I})$, para $m = 0, 1, 2, 3, \dots, 5N-1$, es:

$$\frac{\partial S_2}{\partial I[m]} = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} (I[t] - I_{previo}[t]) \cdot (C_{mod}^{-1}(m, t) + C_{mod}^{-1}(t, m)); \quad (44)$$

donde:

$$\vec{I} = (I[0]..I[N-1], I[N]..I[2N-1], I[2N]..I[3N-1], I[3N]..I[4N-1],$$

$$I[4N]..I[5N-1])$$

$$= (\varepsilon'_{r_o}[0].. \varepsilon'_{r_o}[N-1], \varepsilon''_{r_o}[0].. \varepsilon''_{r_o}[N-1], \sigma_o[0].. \sigma_o[N-1], \mu_{r_o}[0].. \mu_{r_o}[N-1], \theta_l[0].. \theta_l[N-1])$$

Conclusión

La implementación de la Transformada Rápida de Fourier en la inversión geoestadística del campo eléctrico sintético demuestra ser una herramienta eficaz para optimizar el cálculo de parámetros geofísicos. Este método permite una reducción significativa en el tiempo de procesamiento de datos, lo cual es especialmente valioso cuando se manejan grandes cantidades de información. Además, el modelo optimizado proporciona estimaciones precisas de las propiedades electromagnéticas del medio, lo cual mejora la interpretación geofísica en la exploración de subsuelos. En conclusión, la FFT no solo facilita el análisis de señales en el

dominio de la frecuencia, sino que también fortalece el entendimiento de las interacciones electromagnéticas en medios complejos, abriendo nuevas posibilidades para la investigación en geociencias y aplicaciones de ingeniería, contribuyendo al avance de técnicas de exploración y modelado geofísico.

Referencias

- Chirp_Z-transform. (2024, 1 de Agosto). *En Wikipedia. Chirp_Z-transform*
- Griffiths, D. (1989). *Introduction to electrodynamics*. Oregon, United States of America: Pearson.
- Morfe, J. (2024). Reflexión y refracción de la onda plana monocromática con polarización perpendicular al plano de incidencia.
- Neff, H. (1991). *Introductory Electromagnetics*. Tennessee, United States of America: John Wiley & Sons.
- Tarantola, A. (2005). *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Philadelphia, United States of America: SIAM.